České vysoké učení technické v Praze
Fakulta architektury

Počítačové navrhování 3

Seminární práce

TESELACE

Autoři: Martin Vozák

Anna Volfová

Obsah

1. Úvod
   - Definice teselací
   - Stručný přehled historie a významu teselací v matematice a vědě

2. Teselace v rovině

2.1 Požadavky na rovinné teselace

2.2 Typy rovinných teselací

   - Pravidelné teselace
   - Polopravidelné teselace
   - Nepravidelné teselace

2.3 Aplikace rovinných teselací

   - Architektura a design
   - Vzory na keramice a mozaikách
   - Příklady teselací ve výtvarném umění

3. Teselace v prostoru

3.1 Definice a základní principy

   - Co je to prostorová teselace
   - Požadavky na prostorové teselace (plné vyplnění prostoru bez mezer)

3.2 Typy prostorových teselací

   - Pravidelné prostorové teselace (platonská tělesa)
   - Polopravidelné a nepravidelné teselace
   - Prostorové mřížky (např. krystalové struktury)

3.3 Aplikace prostorových teselací

   - Krystalografie a chemie (atomové uspořádání v krystalech)
   - Architektura (např. geodetické kupole)
   - Nanostruktury a materiálová věda

4. Teselace v přírodě

4.1 Příklady rovinných teselací v přírodě

- Vzory na povrchu zvířat
- Listy rostlin a květní uspořádání
- Kožní vzory u plazů a savců
- 7. Seznam literatury

1. Úvod

Definice teselací

Teselace povrchu (z angl. *tessellation*, mozaikování nebo parketování) je způsob zaplnění roviny jedním nebo více geometrickými tvary tak, aby se nepřekrývaly a nevznikaly mezi nimi mezery. V matematice lze tento pojem rozšířit i na vyšší dimenze, například na teselaci prostoru.

Teselace, které mají opakující se vzor, se nazývají pravidelné. Tento pojem někdy označuje pouze teselace s pravidelnými mnohoúhelníky jednoho druhu, zatímco teselace s pravidelnými mnohoúhelníky více různých tvarů se označují jako polopravidelné – v takovém případě je nutné, aby byly tvary kolem každého vrcholu uspořádány stejně[1]. Teselace, které nemají opakující se vzor, se nazývají nepravidelné.

Stručný přehled historie a významu teselací v matematice a vědě

Teselace existují po staletí a jsou stále velmi rozšířené. Jejich zkoumání v matematice má poměrně krátkou historii. V roce 1619 Johannes Kepler provedl jednu z prvních zdokumentovaných studií teselací, když psal o pravidelných a polopravidelných teselacích. Tedy pokrytí roviny pomocí pravidelných mnohoúhelníků. Přibližně o dvě stě let později, v roce 1891, ruský krystalograf E. S. Fedorov dokázal, že každé pokrytí roviny se řídí jednou ze sedmnácti různých skupin izometrií. Fedorovova práce označila neoficiální začátek matematického zkoumání teselací. Mezi další významné přispěvatele patří Shubnikov a Belov (1951) a Heinrich Heesch s Ottem Kienzlem (1963)[2].

Nejznámějším přispěvatelem byl nizozemský umělec M. C. Escher (1898–1972). Proslul svými tzv. nemožnými strukturami, jako jsou „Ascending and Descending“ a „Relativity“, a také transformativními tisky, například „Metamorphosis I“, „Metamorphosis II“ a „Metamorphosis III“, nebo díly jako „Sky & Water I“ či „Reptiles “[2]. Během svého života Escher vytvořil 448 litografií, dřevorytů a rytin a přes 2000 kreseb a skic, které souvisely s teselacemi.

2. Teselace v rovině

2.1. Požadavky na rovinné teselace (krytí roviny bez mezer a překryvů

a) **Bez mezer a překryvů:** Tvary musejí dokonale zaplnit rovinu bez jakýchkoli mezer a bez toho, aby se překrývaly. To znamená, že každý bod roviny je součástí pouze jednoho tvaru teselace.

b) **Opakovatelnost vzoru (u pravidelných teselací):** U pravidelných teselací se používají pouze pravidelné mnohoúhelníky (např. trojúhelníky, čtverce nebo šestiúhelníky), které se opakují stejným způsobem v celé rovině. Kombinace tvarů musí být taková, aby každá součást splňovala podmínky pro uspořádání kolem jednotlivých vrcholů.

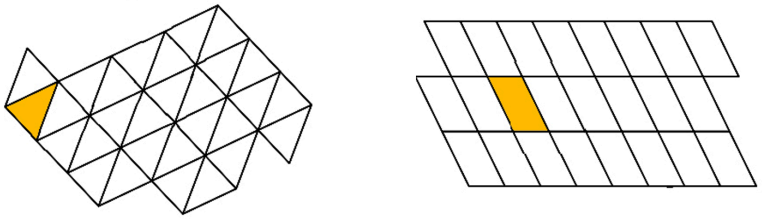
c) **Úhel u vrcholu:** Aby se tvary dokonale spojily, součet vnitřních úhlů tvarů kolem každého vrcholu musí být roven 360°. Tento požadavek je splněn například u rovnostranných trojúhelníků, čtverců a pravidelných šestiúhelníků, protože jejich vnitřní úhly umožňují bezchybnou spojitost na vrcholech.

2.2 Typy rovinných teselací

- **Pravidelné teselace (s pravidelnými mnohoúhelníky)**

Pravidelné teselace jsou tvořeny pouze jedním typem pravidelného mnohoúhelníku, který se opakuje bez mezer a překrývání po celé ploše. Jsou založeny na jednoduchých, symetrických tvarech. Tato geometrická pravidelnost zajišťuje, že se každý bod na ploše nachází v symetrickém uspořádání. Pravidelné teselace jsou běžné v architektuře a designu, často jako základ pro různé druhy dlažeb a dekorativních vzorů. Pro pravidelné mnohoúhelníky existují pouze tři tvary, které mohou samostatně teselovat rovinu: rovnostranný trojúhelník, čtverec a pravidelný šestiúhelník. Tyto tvary splňují podmínku, že v každém vrcholu teselace se setkávají úhly, jejichž součet je přesně 360 stupňů, což zajišťuje bezešvé krytí celé plochy.

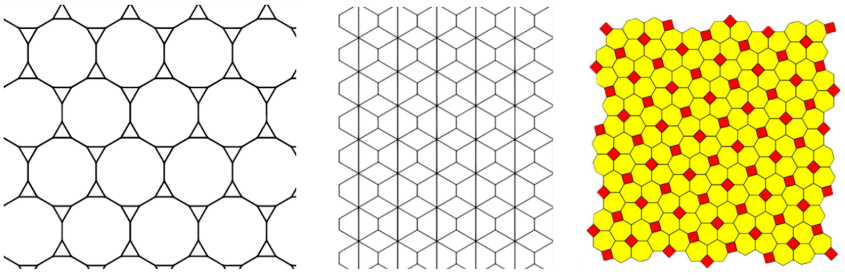
Obrázek 1: Pravidelné teselace, dostupné z: Elektronická skripta DG - Teselace rovinné i prostorové, autorka: Dana Kolářová



Obrázek 2: Monohedrální teselace, dostupné z: Elektronická skripta DG - Teselace rovinné i prostorové, autorka: Dana Kolářová

- **Polopravidelné teselace**

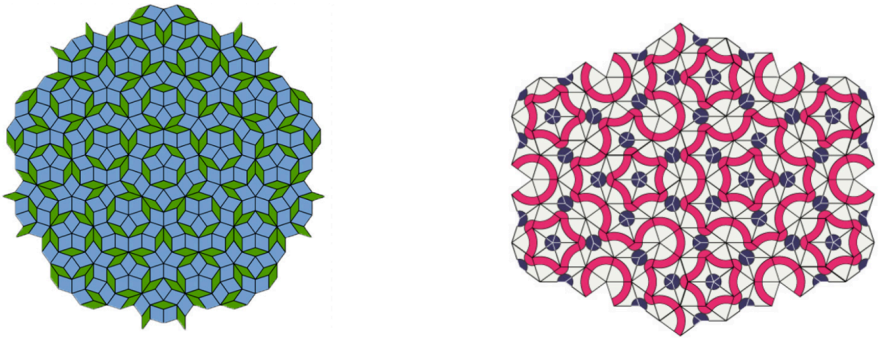
Polopravidelné teselace kombinují různé typy pravidelných mnohoúhelníků, které se opakují v pravidelném vzoru, aby vytvořily celoplošné pokrytí. Tyto teselace jsou složitější než pravidelné teselace, protože zahrnují více druhů mnohoúhelníků, které musí být uspořádány tak, aby nedocházelo k mezerám nebo překryvům. Polopravidelné teselace mohou obsahovat kombinace trojúhelníků, čtverců, šestiúhelníků a jiných pravidelných tvarů. Tento typ teselace poskytuje více možností pro variaci a dekorativní efekty, což je důvod, proč je často využíván v umění a architektuře.



Obrázek 3: Příklady polopravidelných teselací, autor: C. G. Strauss

- **Nepravidelné teselace**

Nepravidelné teselace jsou vzory, které nezahrnují pouze pravidelné nebo polopravidelné mnohoúhelníky, ale mohou být tvořeny nepravidelnými tvary nebo kombinací různých typů nepravidelných prvků. Tyto teselace často postrádají klasickou symetrii, což znamená, že se vzor neopakuje tak předvídatelně jako u pravidelných nebo polopravidelných teselací. Jeden z nejznámějších příkladů nepravidelné teselace je Penrosova dlažba, kterou vytvořil britský matematik a fyzik Roger Penrose. Tento typ teselace používá dvě specifické dlaždice ve tvaru kosočtverce, které se mohou skládat pouze ve specifických vzorech, čímž se vytváří nekonečný, neperiodický vzor. Na rozdíl od tradičních pravidelných a polopravidelných teselací, které jsou periodické, Penrosovy dlažby nemají žádné opakující se jednotky, což znamená, že vzor nelze jednoduše přesunout a zopakovat.



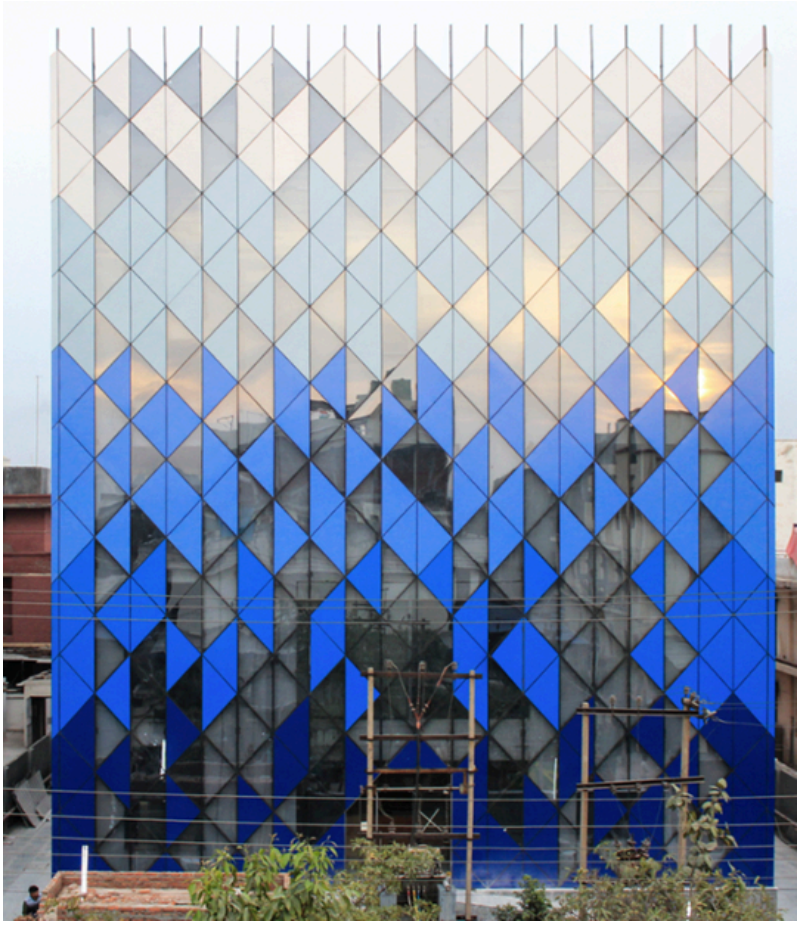
Obrázek 4: Příklady nepravidelných teselací, autor: C G Strauss

2.3 Aplikace rovinných teselací

- **Architektura a design**

Rovinné teselace mají v architektuře a designu široké uplatnění. Pravidelné a polopravidelné teselace jsou často využívány při navrhování podlah, fasád a stropů, protože umožňují jednotné pokrytí plochy s minimem materiálových ztrát. V historických budovách, například v islámské architektuře, se teselace hojně využívají k vytváření dekorativních mozaik a vzorů. Moderní architektura také často využívá teselace, ale ve spojení s novými materiály a technologiemi, v rámci parametrického designu. Takové struktury jsou často složité na výrobu, ale díky technologickému pokroku, jako je 3D tisk nebo CNC obrábění, je dnes možné realizovat i velmi detailní teselované vzory v reálných stavebních projektech. Kromě estetického přínosu mají teselace i praktickou funkci. Například šestiúhelníkové nebo trojúhelníkové dlažby se často používají na veřejných prostranstvích a chodnících, protože jejich tvar je odolný vůči zatížení a jejich spoje pomáhají rozkládat tlak. Pravidelné tvary jako šestiúhelníky nebo čtverce umožňují snadnou montáž a zároveň vysokou odolnost, což je důležité pro oblasti s vysokou frekvencí pohybu osob či vozidel.

Obrázek 5: Cellular Tessellation Pavilion, autoři: studenti z Technologické univerzity v Sydney



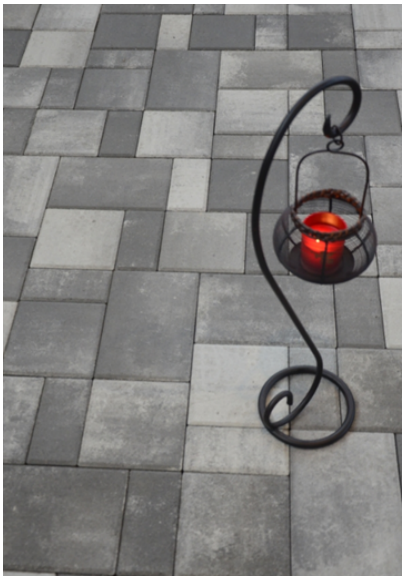
Obrázek 6: Tri-Tessellate, architekti: AKDA

Obrázek 7: New HOTA Galerie s voroniovou teselací

- **Vzory na keramice a mozaikách**

Teselace se již po staletí využívají při výrobě keramiky a mozaik. Jednotlivé dílky mozaiky nebo keramické dlaždice mohou být snadno opakovány do pravidelných vzorů. Historické příklady tohoto umění můžeme najít v antickém Řecku nebo v římských lázních, kde se používaly složité geometrické vzory složené z pravidelných tvarů jako trojúhelníky, čtverce a šestiúhelníky. Ve středověké islámské architektuře dosáhlo umění mozaiky vrcholu. Umělci vytvářeli složité vzory s pravidelnými a polopravidelnými teselacemi, které pokrývaly stěny, podlahy i stropy mešit a paláců. Díky použití symetrických vzorů, které se opakovaly do nekonečna, se dosahovalo estetického efektu, který měl symbolizovat nekonečnost a dokonalost. Tato tradice přetrvala až do současnosti, kde se teselace stále používají v různých formách dekorace keramiky a dlažby. V moderní keramice a interiérovém designu se teselace využívají jak pro tradiční, tak i pro inovativní vzory. Díky digitálním nástrojům je možné vytvořit velmi přesné a složité vzory, které by byly ručně obtížně realizovatelné.

Obrázek 8: Teselace dlaždic

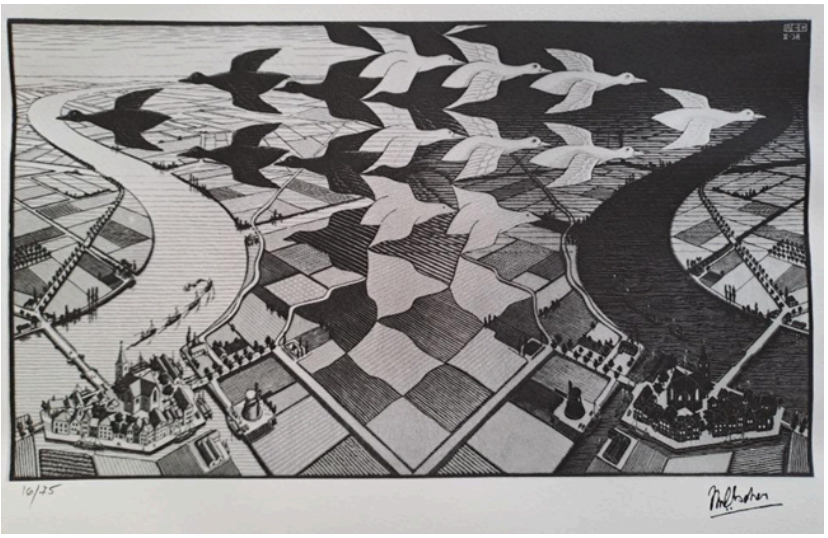


Obrázek 9: Teselace dlaždic

Obrázek 10: Teselace dlaždic

- **Příklady teselací ve výtvarném umění (Escher)**

  Holandský umělec M.C. Escher je jedním z nejznámějších umělců, kteří pracovali s teselacemi ve výtvarném umění. Escher využíval teselace k vytváření iluzivních obrazů, které zpochybňují lidské vnímání prostoru a perspektivy. Jeho díla jsou charakteristická složitými vzory, kde se jednotlivé tvary opakují a často přecházejí v další tvary, čímž vznikají složité metamorfózy. Escherovy obrazy, jako je například „Den a noc“ nebo „Reptiles“, ukazují teselace, které mění perspektivu a tvoří nekonečné smyčky, což fascinuje diváky po celém světě. Escherovy teselace nejsou omezené na pravidelné mnohoúhelníky; často používá nepravidelné tvary, které představují zvířata, ptáky nebo jiné objekty. Tento styl teselace umožňuje divákovi vidět obraz jako celek, ale také jako sérii opakujících se detailů. Díky své schopnosti kombinovat matematickou přesnost a uměleckou tvořivost se Escher stal ikonou v oboru, kde se střetávají matematika a umění, a jeho práce inspirovala mnoho dalších umělců a designérů. Escherův přístup k teselaci měl vliv i na matematický výzkum, zejména na teorii vzorů a symetrií. Jeho díla inspirovala nejen umělce, ale také vědce, kteří studují vlastnosti periodických a neperiodických teselací. Díky tomu, že Escher dokázal kombinovat umění s matematickými principy, se jeho práce stala předmětem zájmu mnoha oborů, včetně grafického designu, architektury a teorie kvazikrystalů.



Obrázek 11: Den a noc, autor: M. C. Escher

Obrázek 12: Escherova teselace, autor: M. C. Escher

Obrázek 13: Escherova teselace, autor: M. C. Escher

3. Teselace v prostoru

3.1 Definice a základní principy

- **Co je to prostorová teselace**

Jedná se o způsob vyplnění trojrozměrného prostoru opakováním jednoho či více těles (mnohostěnů) bez mezer a překryvů.

- **Požadavky na prostorové teselace (plné vyplnění prostoru bez mezer)**

Požadavky na prostorovou teselaci jsou téměř totožné s požadavky na rovinou teselaci, jen aplikované na prostor.

Jedinou podmínkou, která může značit, že je mnohostěn schopen prostorové teselace je rovnost Dehnova invariantu nule. Každý mnohostěn schopen prostorové teselace tuto podmínku splňuje, nikoli však obráceně, tedy ne každý mnohostěn s Dehnovým invariantem rovným nule je prostorové teselace schopen.

- **Dehnův invariant**

Jedná se o hodnotu určující, jestli jeden mnohostěn může být rozkrájen na menší části a přeskládán na jiný. Zároveň musí platit i podmínka shodného objemu, avšak neplatí vždy, že tělesa stejného objemu a se stejným Dehnovým invariantem jsou tohoto schopná.

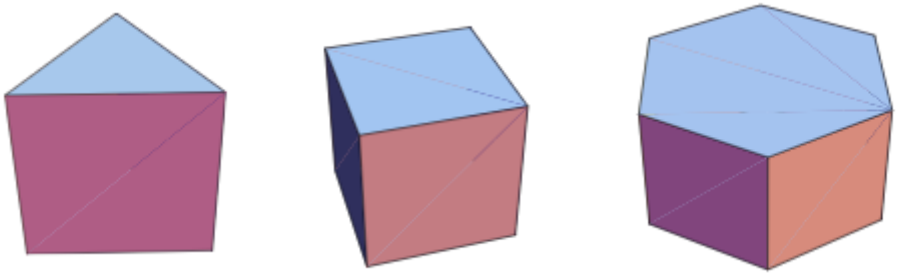
Jediné Platónovo těleso splňující tuto podmínku je krychle a zároveň je tedy jediným Platónovým tělesem, které je schopné prostorové teselace.

3.2 Typy prostorových teselací

- **Pravidelné prostorové teselace**

Tento pojem lze přirovnat k pravidelné rovinné teselaci. Jedná se o způsob vyplnění prostoru, pro který využíváme pouze jednoho druhu tělesa. Takovýchto těles je nekonečné množství, nicméně rozeznáváme několik základních.

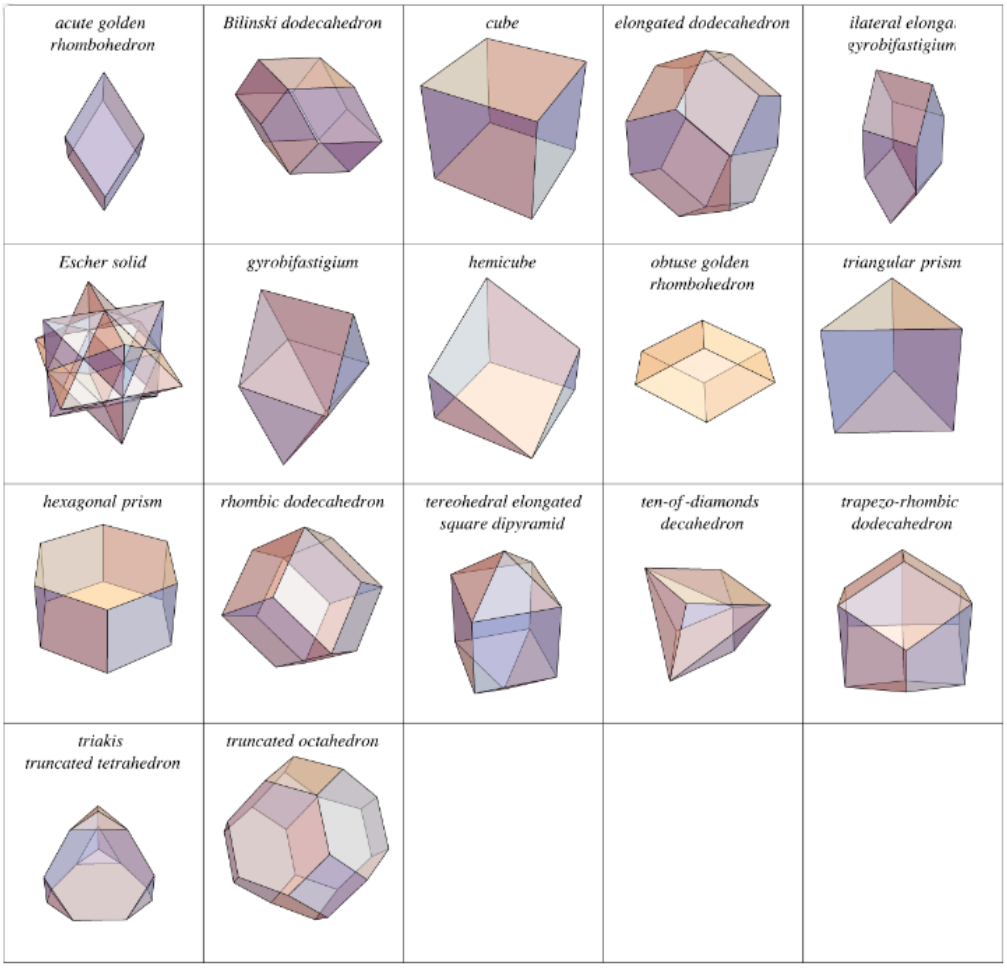
Tělesa prostorové teselace lze libovolně tvořit jako obecné hranoly vycházející z rovinných teselací a to za předpokladu, že pro všechny prvky teselace je směr i velikost vektoru určující posun podstavy totožná. Pro pravidelné prostorové teselace je nutné vycházet z pravidelných rovinných teselací.



Obrázek 14: Hranoly založené na pravidelných mnohoúhelnících; dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/Prism.html

Jak již bylo zmíněno z Platónových těles je jediným mnohostěnem schopným pravidelné prostorové teselace krychle. Z konvexních mnohostěnů s pravidelnými stěnami se jedná kromě krychle pouze o další 4 tělesa, a to hranoly založené na rovnostranném trojúhelníku a pravidelném šestiúhelníku, osekaný osmistěn a gyrobifastigium.

Dalšími mnohostěny schopnými prostorové teselace je kosoštverečný dvanástistěn, protáhlý dvanástistěn a lichoběžníko-kosočtverečný dvanástistěn. Stejně jako vlastně každý čtyřhranný hranol.



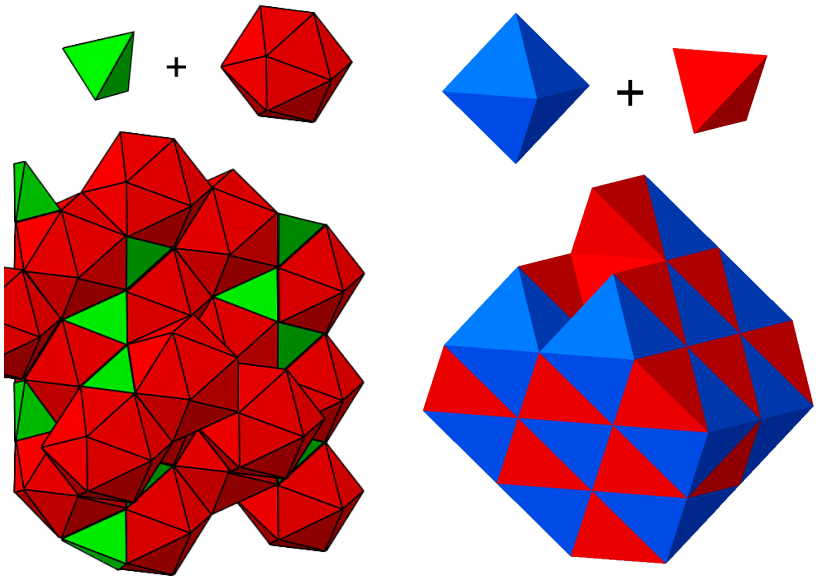
Obrázek 15: Přehled těles schopných prostorové teselace; dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html

Obecně lze mnohostěny prostorové teselace rozdělit na stereoedry a plesioedry. Stereoedr je konvexní mnohostěn, který vyplňuje prostor izohedrálně, což znamená, že při vyplnění prostoru kopií stereoedru existují symetrie, které umožňují přemístit libovolnou kopii stereoedru na místo kterékoliv jiné kopie. Jinými slovy, stereoedr je takový mnohostěn, který dokáže zaplnit prostor bez mezer a překryvů, a přitom má v tomto uspořádání takovou symetrii, že je každá kopie nerozeznatelná od ostatních a lze ji libovolně zaměnit. Plesioedr je také mnohostěn vyplňující prostor, ale na rozdíl od stereoedru má specifickou symetrii: pro libovolnou kopii plesioedru ve vyplněném prostoru (často ve formě prostorové „plástve“) existuje symetrie, která umožňuje přenést ji na místo jiné kopie. Plesioedry tedy také mohou zaplnit prostor, ale jejich symetrie nejsou nutně tak silné jako u stereoedrů – mohou mít méně pravidelné uspořádání.

- **Polopravidelné prostorové teselace**

Polopravidelných prostorových teselací existuje také nepřeberné množství. Princip je opět stejný jako při rovinné polopravidelné teselaci. Prostor u tohoto typu nelze vyplnit jedním samostatným mnohostěnem, ale pro splnění podmínky prostorové teselace – bez mezer a bez překryvů, je potřeba doplnit mnohostěn o jeden či více dalších mnohostěnů.

Z Platónských těles lze polopravidelnou teselaci používající dva mnohostěny vytvořit kombinací čtyřstěnů a osmistěnů nebo kombinací čtyřstěnů a osekaných čtyřstěnů, teselaci používající tři mnohostěny lze vytvořit z osmistěnů, osekaných osmistěnů a krychlí a to v poměru 1:1:3.

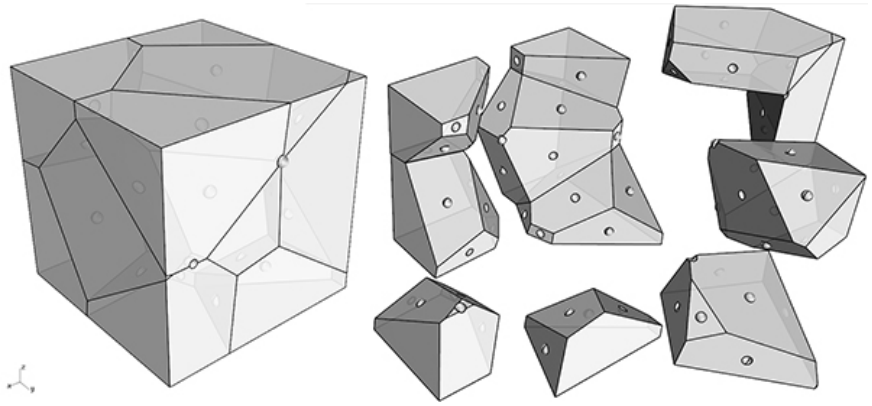


Obrázek 16: Polopravidelná teselace složená z dvou Platónských těles (dvacetistěn + čtyřstěn | osmistěn + čtyřstěn); dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HC_P1-P3.png; https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Alternated_bitruncated_cubic_honeycomb.png

Při přechodu mimo Platónská tělesa se množství řešení polopravidelných prostorových teselací rozšiřuje do nekonečna.

- **Nepravidelné prostorové teselace**

Jedná se o způsob prostorové teselace zaměřující se pouze na vyplnění prostoru mnohostěny bez jakýchkoli podmínek a pravidel. Spadá sem například Voronoiova teselace.

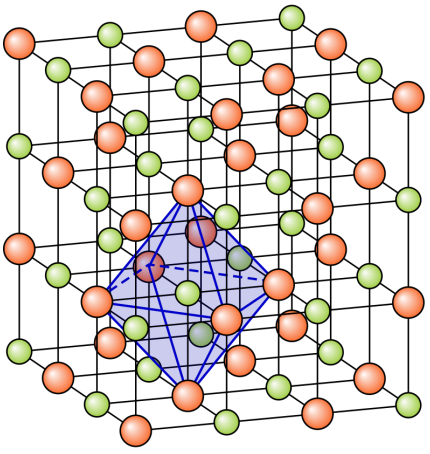


Obrázek 17: Nepravidelná teselace krychle voronoi; dostupné z: https://www.designcoding.net/3d-voronoi-puzzle/

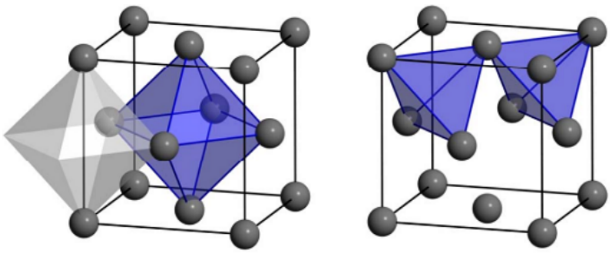
3.3 Aplikace prostorových teselací

- **Krystalografie a chemie (atomové uspořádání v krystalech)**

V oblasti krystalografie je prostorová teselace základním principem, který určuje uspořádání atomů v pevných látkách. Krystaly se skládají z atomů uspořádaných do pravidelných prostorových mřížek, které minimalizují energii systému a zajišťují stabilitu struktury. Teselace zde funguje jako mechanismus pro vyplnění prostoru atomy nebo molekulami ve vzorcích, které se opakují, čímž vytvářejí pevné krystalové mřížky. Každý druh krystalové struktury (např. kubická, hexagonální, tetragonální) má odlišnou geometrii teselace a tato struktura ovlivňuje vlastnosti materiálu, jako je pevnost, elektrická vodivost nebo lomivost. V chemii se teselace využívá k analýze těchto atomových struktur a k pochopení vazeb mezi jednotlivými atomy v molekulách.



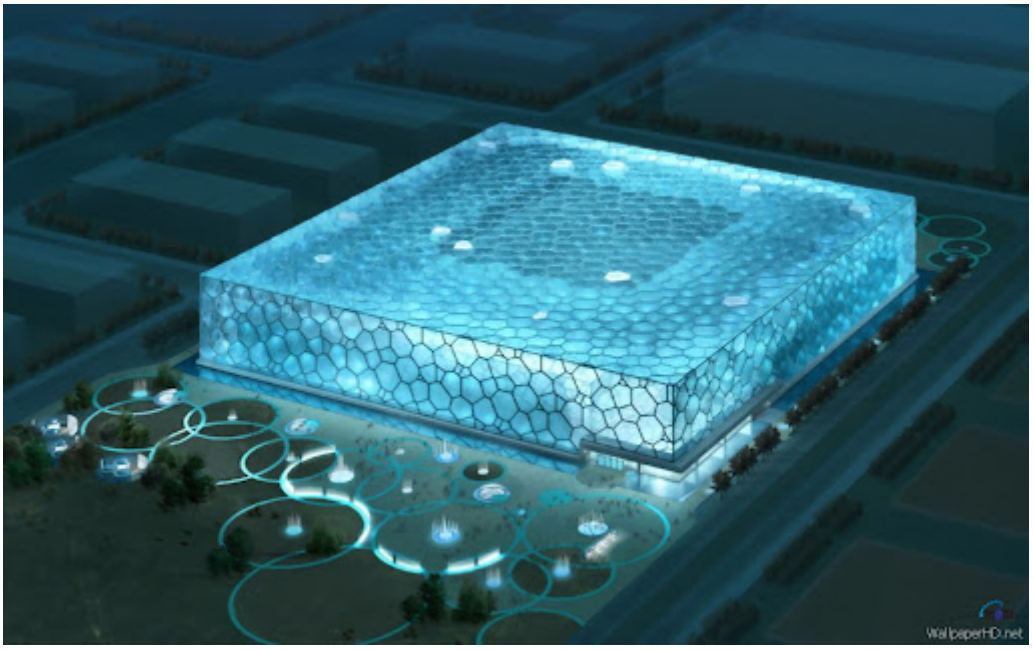
Obrázek 18: Krystalová mřížka, ve které lze nalézt osmistěn; dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Krystalick%C3%A1_struktura#/media/Soubor:NaCl-Ionengitter.svg



Obrázek 19: Krystalová mřížka, ve které lze nalézt osmistěn i čtyřstěn; dostupné z: https://www.cup.lmu.de/ac/rusan/site/assets/files/1046/stex_ws_22_23_teil_4.pdf

- **Architektura (např. geodetické kupole)**

V architektuře se teselace uplatňuje při navrhování esteticky i funkčně efektivních struktur. Někdy se však jedná spíše o formu rovinné teselace na povrchu prostorových těles jindy se setkáme přímo s prostorovou teselací uplatněnou na část či celek objektu. Příkladem takovéto prostorové teselace je fasáda Plaveckého stadionu v Pekingu (Water Cube), která je tvořena prostorovými voronoi - jedná se o ocelový rám následující hrany vorovoiů, který je vyplněn nafouknutou ETFE fólií. Prostorová teselace v architektuře často inspiruje návrh celého objektu až po detail interiéru, kde opakující se vzory vytvářejí vizuálně poutavé a funkčně výhodné konstrukce.



Obrázek 20: Plavecký stadion Water Cube, Peking; dostupné z: http://www.bubblemania.fr/en/architecture-bulle-cube-deau-2003-2008-pekin-chine/

Obrázek 21: Konstrukce fasády Water Cube; dostupné z: http://www.bubblemania.fr/en/architecture-bulle-cube-deau-2003-2008-pekin-chine/

- **Nanostruktury a materiálová věda**

V materiálové vědě a nanotechnologiích se prostorová teselace uplatňuje při navrhování a zkoumání materiálů na atomární a molekulární úrovni. Teselace zde umožňuje efektivní využití prostoru při skládání materiálů s unikátními vlastnostmi, jako jsou ultratenké vrstvy nebo nanopórovité struktury. Příkladem mohou být tzv. "metamateriály", které využívají periodické uspořádání na nanoúrovni, což jim umožňuje manipulovat s vlastnostmi, jako je průchod světla nebo tepla. Uspořádání atomů ve formě prostorové teselace může v těchto materiálech zajistit vysokou pevnost, nízkou hmotnost nebo specifické optické či elektrické vlastnosti, čímž otevírá nové možnosti pro využití v elektronice, medicíně nebo stavebnictví.

4. Teselace v přírodě

4.1 Příklady rovinných teselací v přírodě

- **Vzory na povrchu zvířat (např. včelí plástve, šupiny ryb)**

Obrázek 14: Včelí plástve, autor: Waugsberg

Obrázek 15: Rybí šupiny, dostupné z: https://www.ceskestavby.cz/clanky-foto/jak-prozit-tradicni-vanoce-23558.html?photo=4

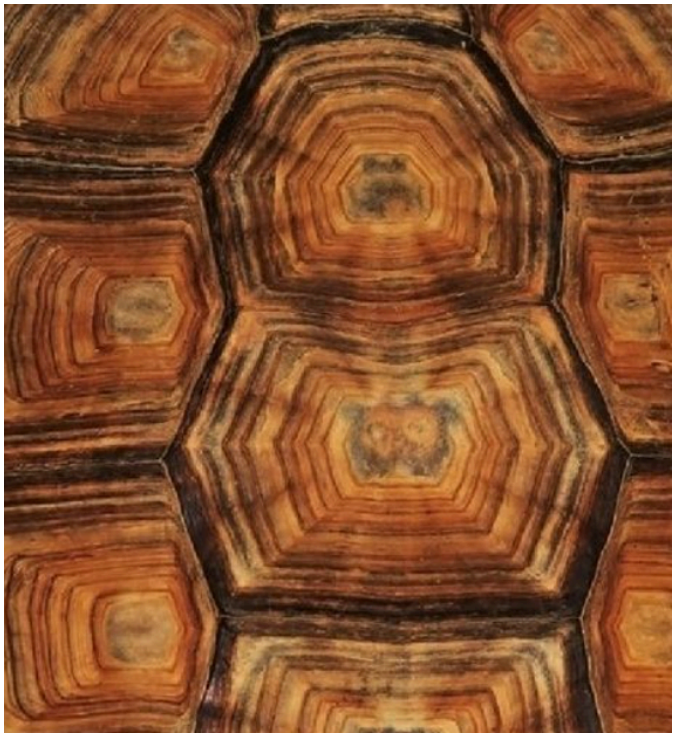
- **Listy rostlin a květní uspořádání**

Obrázek 16: Květ, dostupné z: https://www.spacemakeplace.com/tessellation-patterns/

Obrázek 17: List, dostupné z: https://www.spacemakeplace.com/tessellation-patterns/

Obrázek 18: Květ, dostupné z: https://www.spacemakeplace.com/tessellation-patterns/

- **Kožní vzory u plazů a savců**



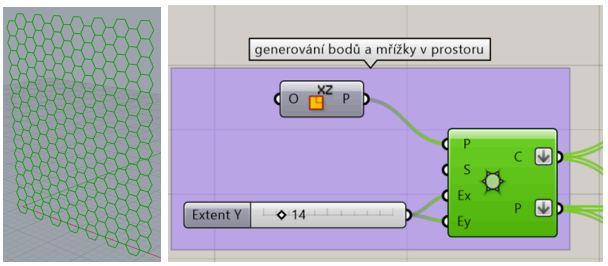
Obrázek 19: Želví krunýř, dostupné z: https://cz.pinterest.com/pin/238831586477490828/

Obrázek 20: Skvrny žirafy, dostupné z: https://cz.pinterest.com/pin/238831586477490826/

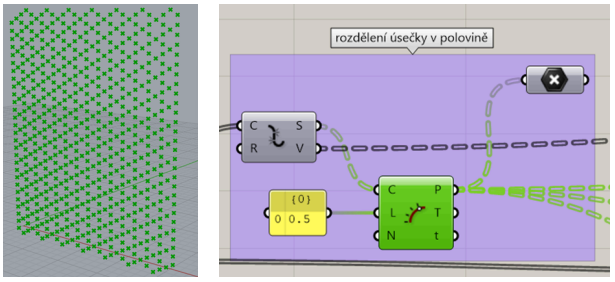
5. Praktická část

Rovinná teselace - script

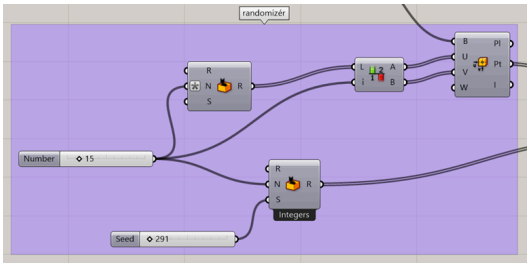
1. Generování bodů a mřížky v prostoru



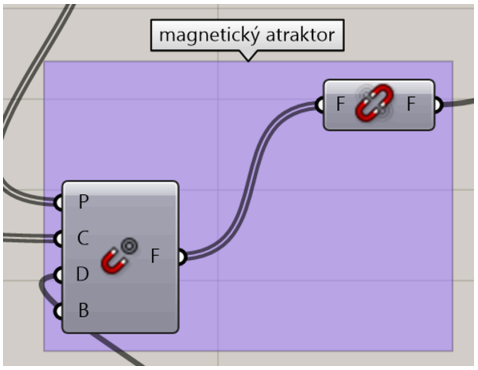
2. Rozdělení úsečky v polovině



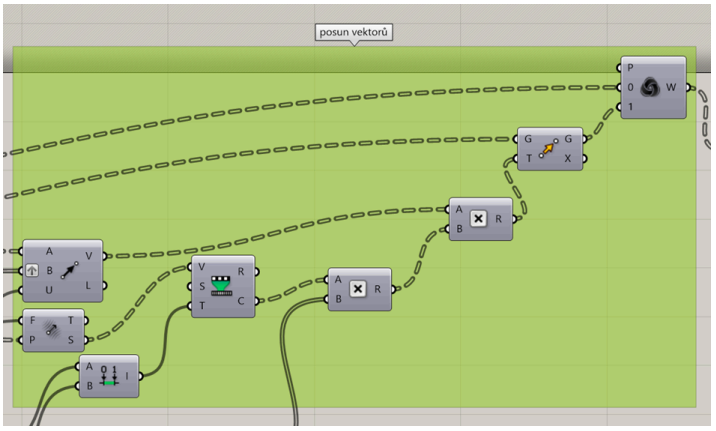
3. Randomizace – generování náhodných hodnot, aby byl vzor rozmanitější



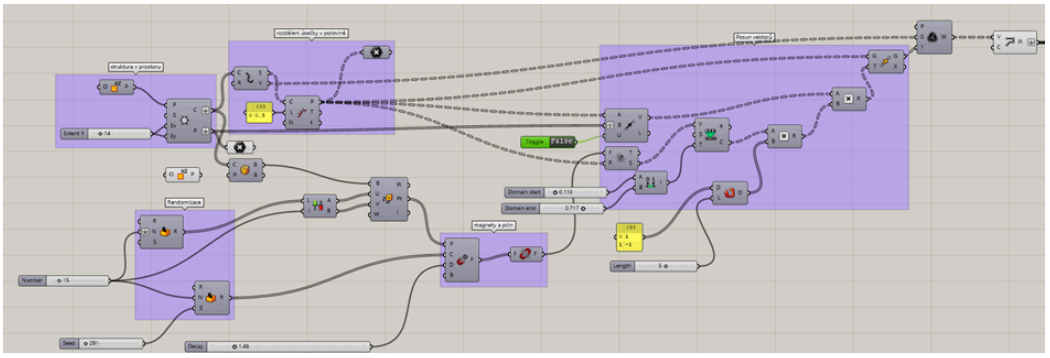
4. Magnetické atraktory - přitahování nebo odpuzování jednotlivých prvků v závislosti na vzdálenosti od atraktorů

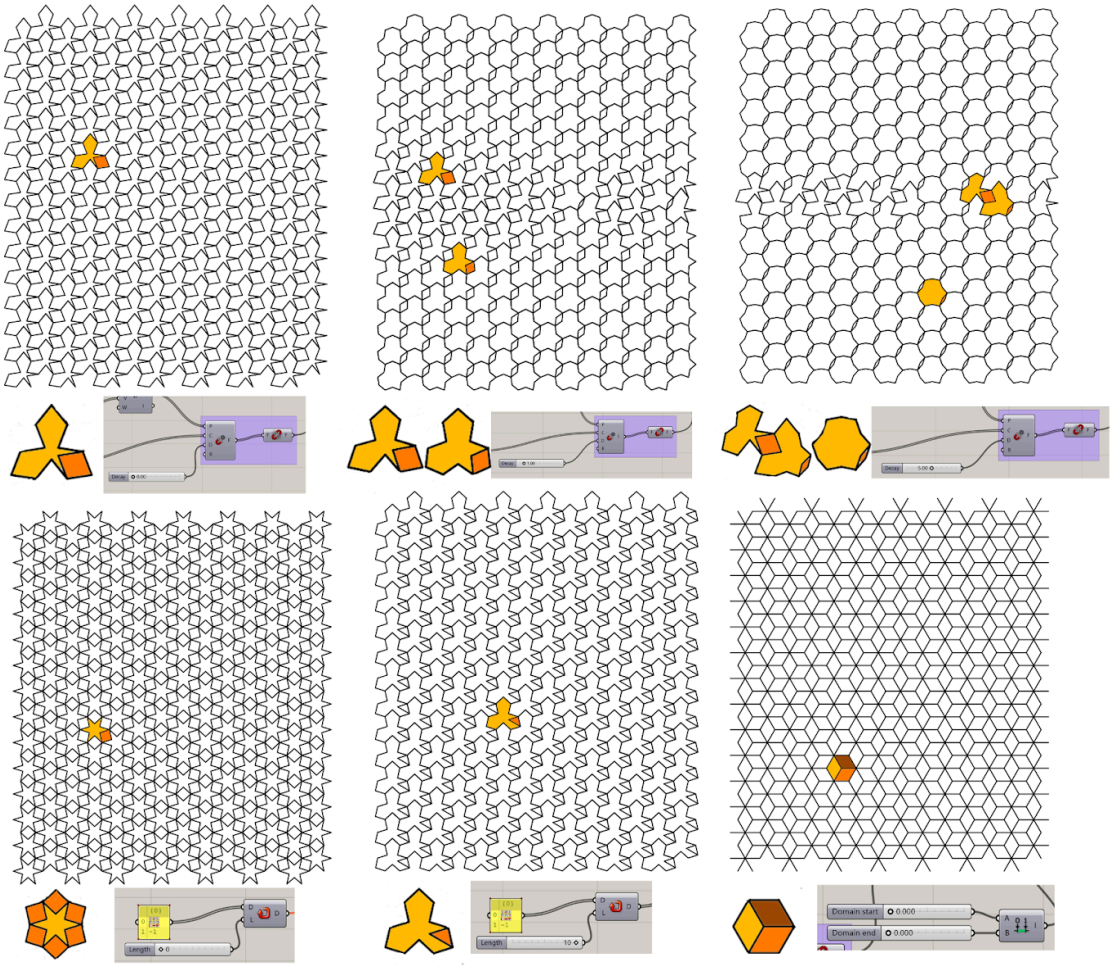


5. Parametrizace a nastavení hodnot – posuvníky různých parametrů (ovlivňují výsledný vzor



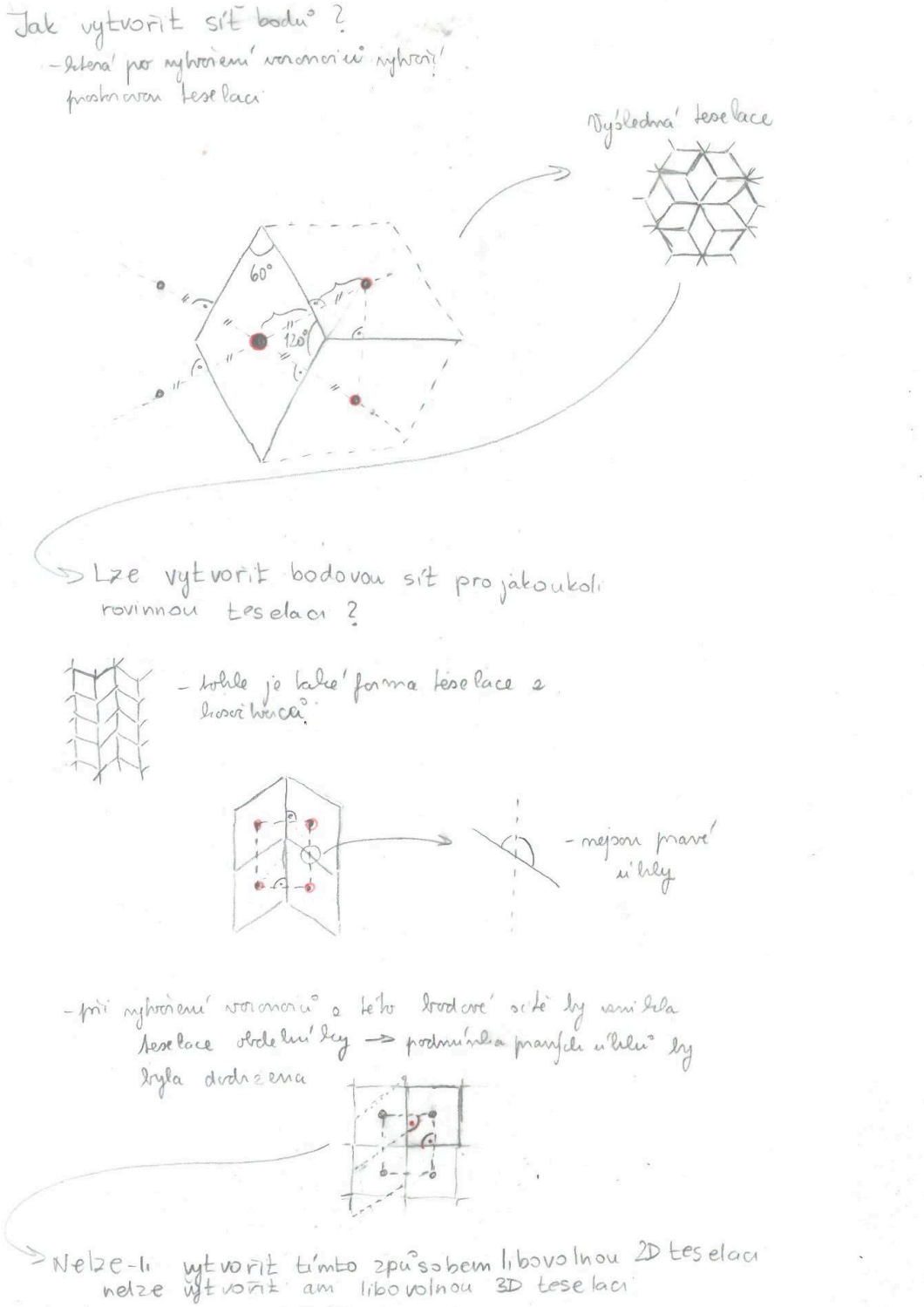
5. Výsledný script a teselace




Length
Length
Domain start
Domain end

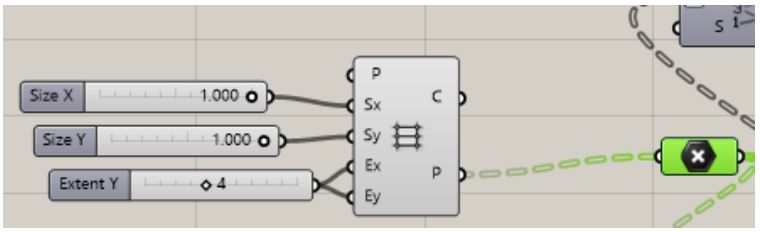
Prostorová teselace - script

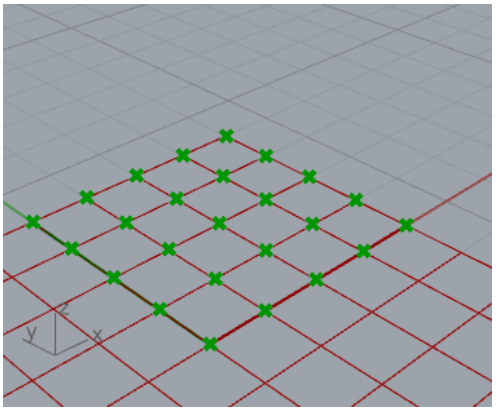
- Záměrem je za pomoci voronoi diagramu vytvořit buňku prostorové teselace. Nejdříve je potřeba se podívat na vztah obecné rovinné teselace a možností její generace přes voronoi diagram. Z toho se dají následně odvodit možnosti generace prostorové teselace touto metodou



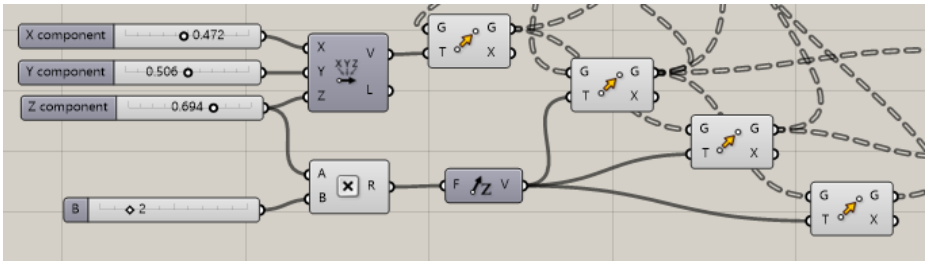
- Vidíme tedy, že nelze vytvořit každou teselaci ať rovinnou nebo prostorovou pomocí voronoiů, ale u některých to lze a je tedy možné vytvořit script, který na základě parametricky zadané sítě generuje nekonečnou škálu prostorových buněk, které splňují podmínky pro prostorovou teselaci. Přiložený soubor obsahuje několik takovýchto scriptů, založených na různých rovinných teselacích. Zde je pro ilustraci prezentován jeden z nich - založený na ortogonální síti bodů

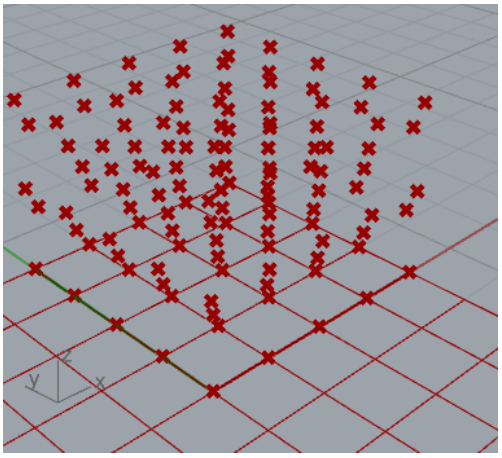
1. Vytvoření rovinného pole bodů



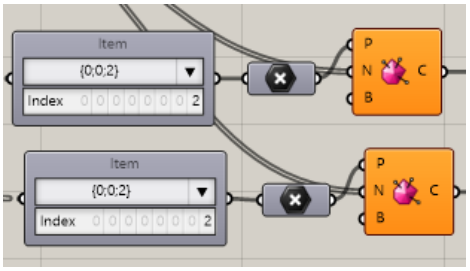


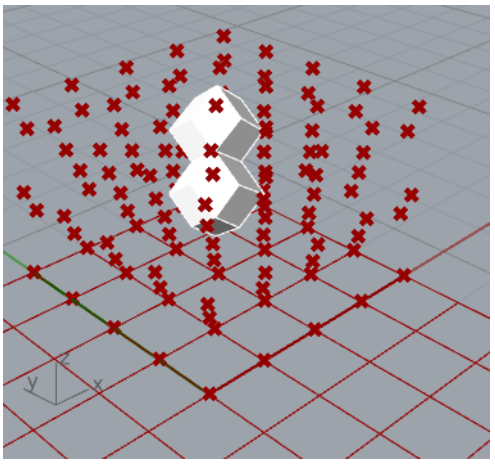
2. Vytvoření prostorové mřížky bodů



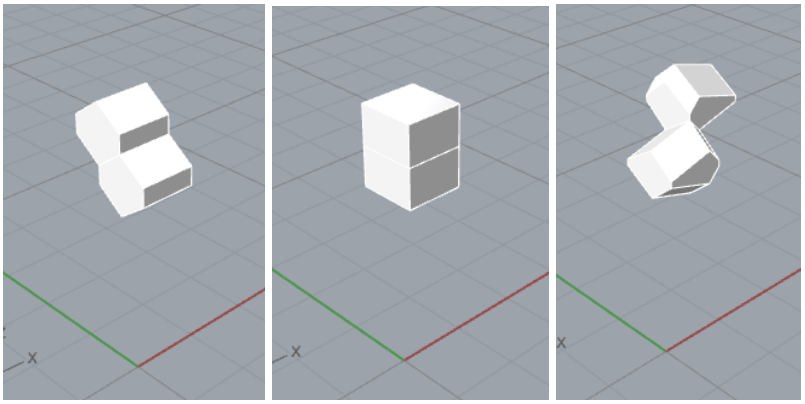


3. Vytvoření buňky (mnohostěnu)





4. Variace vektorů určujících posun



Zdroje

1. Teselace v encyklopedii MathWorld (anglicky)
2. https://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2003.fall/Thomas/Tessellation%20project/History.htm - History of Tessellations
3. https://www.storyofmathematics.com/glossary/tessellation/-Tesselation-definition and meaning
4. https://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Dehn_invariant
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb_(geometry)